Lógica

Logica de Primer Orden: sintaxis

Damiano Zanardini

GRADUADO/A EN INGENIERÍA INFORMÁTICA
FACULTAD DE INFORMÁTICA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID
damiano@fi.upm.es

Curso Académico 2010/2011

Sintaxis de un lenguaje de primer orden

Un *alfabeto* $\mathcal{A}$ se define con

- símbolos de *variable*: x, y, z, w, x', ...
- símbolos de *constante*: a, b, c, ...
- símbolos de *función*: $f(\_)$, $g(\_,\_)$, ... (*aridad* = n. de args: $f/1$, $g/2$)
  - las constantes son funciones sin argumentos
- símbolos de *predicado*: $p(\_)$, $q(\_,\_)$, ..., $= /2$
  - las proposiciones son predicados sin argumentos
- conectivas: $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
- *cuantificadores*: $\forall$, $\exists$

- es decir, hemos añadido los argumentos de los predicados y todo lo que deriva de ello: variables, constantes, funciones, cuantificadores

Sintaxis de un lenguaje de primer orden

- símbolos de variable: x, y, z
- símbolos de constante: a, b, c, tom, 0, 1
- símbolos de función: $f/1$, $g/2$
- símbolos de predicado: $p/0$, $q/2$, $cat/1$, $+/3$

Términos

- una variable es un término
- una constante es un término
- si $t_1, ..., t_n$ son términos y f es un símbolo de función con aridad $n \geq 1$, entonces $f(t_1, ..., t_n)$ es un término

Ejemplos

$$a \quad f(tom) \quad f(1 \quad a() \quad a(1) \quad f(2) \quad g(g, g(1)) \quad q(0, f(1))$$
$$a + y \quad g(1, f(a)) \quad g(0c) \quad cat(cat(0)) \quad +(a, f(z), c) \quad f(f(f(x)))$$

Sintaxis de un lenguaje de primer orden

- símbolos de variable: x, y, z
- símbolos de constante: a, b, c, tom, 0, 1
- símbolos de función: $f/1$, $g/2$
- símbolos de predicado: $p/0$, $q/2$, $cat/1$, $+/3$

Átomos

- una proposición es un átomo
- si $t_1, ..., t_n$ son términos y p es un símbolo de predicado de aridad $n \geq 1$, entonces $p(t_1, ..., t_n)$ es un átomo

Ejemplos

$$cat(g(x,y)) \quad p \quad q \quad q(\forall xp(x), \forall xp(f(x))) \quad q(p,p) \quad f(q(a,a))$$
$$q(a, f(1)) \quad +(a, f(z), c) \quad q(0, , z) \quad cat(a, 1) \quad cat(cat(f(1)))$$

Sintaxis de un lenguaje de primer orden

- símbolos de variable: x, y, z
- símbolos de constante: a, b, c, tom, 0, 1
- símbolos de función: $f/1$, $g/2$
- símbolos de predicado: $p/0$, $q/2$, $cat/1$, $+/3$

Fórmulas

- un átomo es una fórmula
- si F y G son fórmulas, y x es una variable, entonces $\neg F$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$, $(F \leftrightarrow G)$, $\forall x F$ y $\exists x F$ también son fórmulas

Ejemplos

$$(p \rightarrow \neg q(a, f(x))) \qquad p\wedge \qquad \exists z f(1) \qquad \forall a(q(a,0) \leftrightarrow g(0,a))$$
$$\forall p \qquad (\neg cat(a) \wedge (\forall x p \vee \exists y\, cat(y))) \qquad q(a,b) \leftrightarrow tom$$

Sintaxis de un lenguaje de primer orden

Literales

- un *literal* es un átomo o la negación de un átomo
  - p, $\neg p$, $q(a, f(1))$, $\neg q(a, f(1))$, $cat(g(x, y))$, $\neg cat(g(x, y))$
- se trata de un concepto muy usado en lo que sigue

Precedencia

- se usan las reglas de la lógica proposicional, pero hay que ocuparse de los cuantificadores
- igual que la negación, los cuantificadores tiene mayor precedencia que las otras conectivas

☞ $\exists x F \wedge G$ es lo mismo que $(\exists x F) \wedge G$

☞ significa que la segunda x en $\exists x p(x) \wedge q(x)$ no está cuantificada como la primera

Sintaxis de un lenguaje de primer orden

Apariciones libres y ligadas de variables

- una aparición de una variable x se encuentra *ligada* en F si se encuentra en el ámbito de algún $\exists x$ o $\forall x$, según las reglas de precedencia

$$\exists x(p(1, x, y) \wedge q(x)) \wedge q(x)$$

- una aparición se encuentra *libre* si no se encuentra ligada

$$\exists x(p(1, x, y) \wedge q(x)) \wedge q(x)$$

☞ son las *apariciones* de símbolos de variable, no los símbolos de variable, que se encontran libres o ligadas

☞ de hecho una variable puede aparecer libre y ligada a la vez en una fórmula

- se escribe $F(x)$ para decir que puede haber una aparición libre de x en F

Sintaxis de un lenguaje de primer orden

Fórmulas cerradas y abiertas

- una fórmula es *cerrada* cuando no contiene apariciones libres de variables; si no, es *abierta*
- podemos decir que las fórmulas interesantes son las cerradas: donde toda variable es "introducida" por un cuantificador

$$\forall x \exists y \; mayor(y, x)$$

- en cambio, ¿qué es x en $\exists y \, mayor(y, x)$?
- pero necesitamos el concepto de fórmula abierta cuando "descomponemos" las fórmulas en sus partes (subfórmulas)

$$\forall x \forall y (p(x, y) \wedge q(y, x))$$

  las subfórmulas $p(x, y)$ y $q(y, x)$ son de por sí abiertas
- vamos a necesitar esto dentro de poco (semántica de los cuantificadores)

Cierre universal de una fórmula

- se llama *cierre universal* de una fórmula F la fórmula $Cierre_\forall(F) = \forall x_1 \forall x_2 .. \forall x_k F$ donde $x_1 .. x_k$ son todas las variables que aparecen libres en F

$$Cierre_\forall(p(x) \vee \exists y q(x, z, y)) = \forall x \forall z (p(x) \vee \exists y q(x, y))$$

- propiedades
  - $Cierre_\forall(F)$ es una fórmula cerrada

☞ no hay que olvidarse los paréntesis

Sintaxis de un lenguaje de primer orden

Cierre existencial de una fórmula

- se llama *cierre existencial* de una fórmula F la fórmula $Cierre_{\exists}(F) = \exists x_1 \exists x_2 .. \exists x_k F$ donde $x_1..x_k$ son todas las variables que aparecen libres en F

$$Cierre_{\exists}(p(x) \vee \exists y q(x, z, y)) = \exists x \exists z (p(x) \vee \exists y q(x, y))$$

- propiedades
  - $Cierre_{\exists}(F)$ es una fórmula cerrada

☞ no hay que olvidarse los paréntesis

Introducción

- en este apartado, tratamos las fórmulas únicamente como secuencias de símbolos
- usamos las sustituciones para
    - definir la semántica del lenguaje ($\forall$, $\exists$)
    - en la segunda parte
        - el concepto de *instancia*
        - árboles semánticos
        - unificación
        - resolución

Sustituciones

Definición formal

Una *sustitución* es una función parcial (con dominio finito) que asocia variables con términos: $\alpha = \{\ x_1/t_1,\ x_2/t_2,\ ..,\ x_n/t_n\ \}$

- $x_1, .., x_n$ son variables distintas (si no, no sería una función)
- en general, una función f se puede escribir como un conjunto de "pares":

$$f(x) = 2x$$
$$\{(1,2),\ (2,4),\ (3,6),\ (4,8), ...\}$$
$$\{1/2,\ 2/4,\ 3/6,\ 4/8, ...\}$$

Terminología

- *ligadura*: un par x_i/t_i
- *Dominio* $(\alpha) = \{\ x \mid \exists t(x/t \in \alpha)\ \}$
- *Rango* $(\alpha) = \{\ y \mid \exists t(\exists x(x/t \in \alpha) \wedge y$ aparece en $t)\ \}$
- $\lambda = \{\}$ (*sustitución vacía*, no hace nada)

Sustituciones

Ejemplos: variables x, y, z, w

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1 & = & \{\ x/f(a),\ y/x,\ z/h(b,y),\ w/a\ \} \\ \\ \alpha_2 & = & \{\ x/a,\ y/a,\ z/h(b,c),\ w/f(d)\ \} \\ \\ \alpha_3 & = & \{\ x/y,\ z/w\ \} \\ \\ \lambda & = & \{\} \end{array} \quad \begin{array}{r} \mathit{Dominio}\,(\alpha_1) = \{x,y,z,w\} \\ \mathit{Rango}\,(\alpha_1) = \{x,y\} \\ \mathit{Dominio}\,(\alpha_2) = \{x,y,z,w\} \\ \mathit{Rango}\,(\alpha_2) = \{\} \\ \mathit{Dominio}\,(\alpha_3) = \{x,z\} \\ \mathit{Rango}\,(\alpha_3) = \{y,w\} \\ \mathit{Dominio}\,(\lambda) = \{\} \\ \mathit{Rango}\,(\lambda) = \{\} \end{array}$$

Sustituciones

Aplicación de una sustición a una fórmula

- lo que necesitamos en este curso es unas cuantas definiciones específicas
- una sustitución se puede aplicar a una fórmula de tres formas:
  - aplicación "libre" $F\alpha_\ell$
  - aplicación "universal" $F\alpha_\forall$
  - aplicación "existencial" $F\alpha_\exists$
- aunque la definición estándar de sustitución se parece más a la libre, nosotros estamos más interesados en las otras dos
- si está claro qué tipo de sustitución se usa, escribimos $F\alpha$

Sustituciones

Aplicación libre de α a F

- la *aplicación libre* $F\alpha_\ell$ de una sustitución α a F es la fórmula que se obtiene reemplazando simultaneamente para cada i cada aparición libre de x_i en F con t_i, para todo $x_i/t_i \in \alpha$

$$\alpha = \{\ x/f(a),\ \ y/x,\ \ z/h(b,y),\ \ w/a\ \}$$

  - $(p(x,y,z))\alpha = p(f(a), f(a), h(b, f(a)))$ $\rightsquigarrow$ incorrecta
  - $(p(x,y,z))\alpha = p(f(a), x, h(b,y))$ $\rightsquigarrow$ correcta

Sustituciones

Aplicación universal de α a F

- condiciones:
  - que F sea cerrada y tenga forma $\forall x_1 \forall x_2 .. \forall x_n\ G$, donde G es una fórmula cualquiera y puede contener otros cuantificadores
  - que el dominio de α sea un subconjunto de $\{x_1, .., x_n\}$
- la *aplicación universal* $F\alpha_\forall$ de una sustitución $\alpha = \{y_1/t_1, .., y_k/t_k\}$ a F es la fórmula que se obtiene
  1. quitando los cuantificadores $\forall x_1 \forall x_2 .. \forall x_n$ de la cabeza
  2. obteniendo G' como aplicación *libre* de α a G: $G' = G\alpha_\ell$
  3. cerrando universalmente G' para obtener $F\alpha_\forall$

$\alpha = \{\ x/f(a),\ \ y/x,\ \ z/h(y)\ \}$

$\forall x \forall y \forall w \forall z (p(x, y, w) \vee q(z, z))$

$p(x, y, w) \vee q(z, z)$

$p(f(a), x, w) \vee q(h(y), h(y))$

$\forall x \forall w \forall y (p(f(a), x, w) \vee q(h(y), h(y)))$

Sustituciones

Aplicación existencial de α a F

- condiciones:
  - que F sea cerrada y tenga forma $\exists x_1 \exists x_2 .. \exists x_n\ G$, donde G es una fórmula cualquiera y puede contener otros cuantificadores
  - que el dominio de α sea un subconjunto de $\{x_1, .., x_n\}$
- la *aplicación existencial* $F\alpha_\exists$ de una sustitución $\alpha = \{y_1/t_1, .., y_k/t_k\}$ a F es la fórmula que se obtiene
  1. quitando los cuantificadores $\exists x_1 \exists x_2 .. \exists x_n$ de la cabeza
  2. obteniendo G' como aplicación *libre* de α a G: $G' = G\alpha_\ell$
  3. cerrando existencialmente G' para obtener $F\alpha_\exists$

$\alpha = \{\ x/f(a),\ \ y/x,\ \ z/h(y)\ \}$

$\exists x \exists y \exists w \exists z (p(x, y, w) \vee q(z, z))$
$p(x, y, w) \vee q(z, z)$
$p(f(a), x, w) \vee q(h(y), h(y))$
$\exists x \exists w \exists y (p(f(a), x, w) \vee q(h(y), h(y)))$

Sustituciones

Composición de sustituciones

Dadas $\alpha = \{x_1/t_1, .., x_n/t_n\}$ y $\beta = \{y_1/s_1, .., y_m/s_m\}$, la *composición* $\alpha\beta$ de estas sustituciones se define como el conjunto

$$\{\ x_1/(t_1\beta),\ ..,\ x_n/(t_n\beta),\ y_1/s_1,\ ..,\ y_m/s_m\ \}$$

del que se *eliminan los elementos* tales que (1) $x_i \equiv t_i\beta$; o (2) $y_j \in \{x_1, .., x_n\}$

Ejemplo

$$\begin{array}{lcl} \alpha & = & \{\ x/3,\ y/f(x,1)\ \} \\ \beta & = & \{\ x/4\ \} \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} \alpha\beta & = & \{\ x/3,\ y/f(4,1)\ \} \\ \beta\alpha & = & \{\ x/4,\ y/f(x,1)\ \} \end{array}$$

Propiedades: para toda F, α, β, γ

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) \qquad \alpha\lambda = \lambda\alpha = \alpha \qquad \alpha\beta \neq \beta\alpha$$

$$(F\alpha_\ell)\beta_\ell = F(\alpha\beta)_\ell \qquad (F\alpha_\forall)\beta_\forall = F(\alpha\beta)_\forall \qquad (F\alpha_\exists)\beta_\exists = F(\alpha\beta)_\exists$$

Sustituciones

Condición general para aplicar una sustitución

- una sustitución α no se puede aplicar *de ninguna forma* a una fórmula F si pasa lo siguiente:
  - α contiene una ligadura x/t y t contiene la variable y
  - hay una ocurrencia de x en F que se puede reemplazar por t según las reglas de la aplicación (libre, universal o existencial)
  - pero dicha ocurrencia está dentro del ámbito de un cuantificador sobre y

$$(\forall x \forall y(\exists z q(x, z)))\{x/f(z)\}_{\forall} \quad = \quad \forall z \forall y(\exists z q(z, z))$$

no se puede hacer